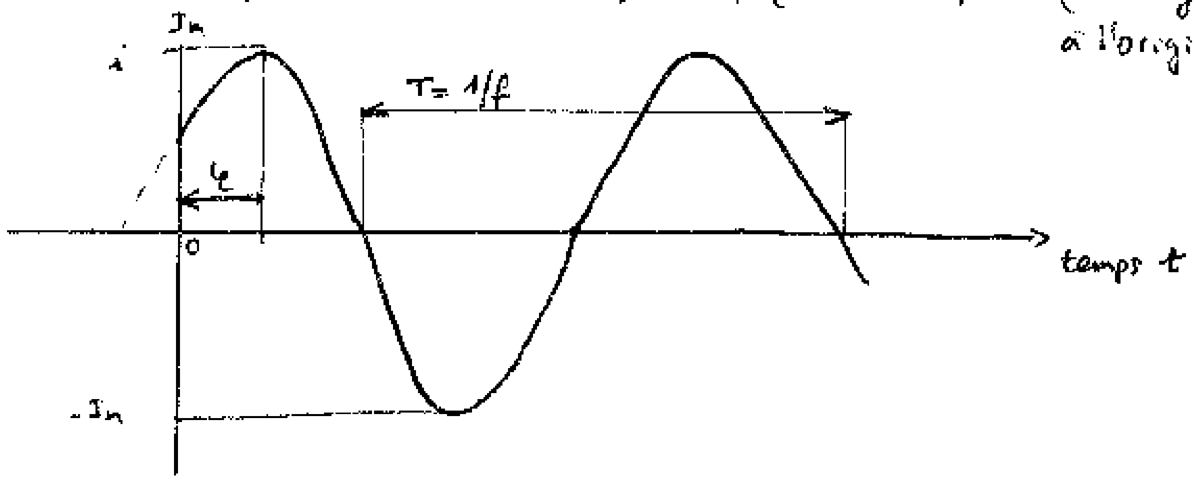
Rappels sur le courant alternatif sinusoïdal

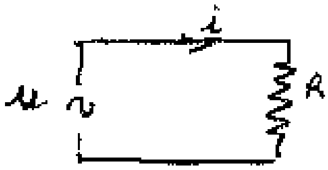
Un courant alternatif sinusoïdal varie en fonction du temps
sa valeur instantanée est $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

avec I_m amplitude : le courant varie entre $+I_m$ et $-I_m$ (donc change de sens à chaque demi-période en passant par la valeur 0)

ω est la pulsation $\omega = 2\pi f$ • φ est la phase (décalage par rapport à l'origine des temps)

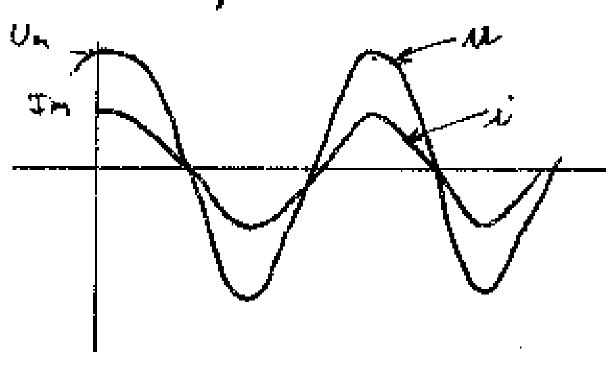


Résistance soumise à une ddp sinusoïdale

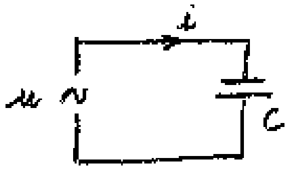


une résistance R soumise à une ddp sinusoïdale $u = U_m \cos\omega t$ est parcourue par un courant sinusoïdal $i = I_m \cos\omega t$ avec $\boxed{R = \dfrac{U_m}{I_m}}$

la tension aux bornes de la résistance est en phase avec le courant qui la traverse.

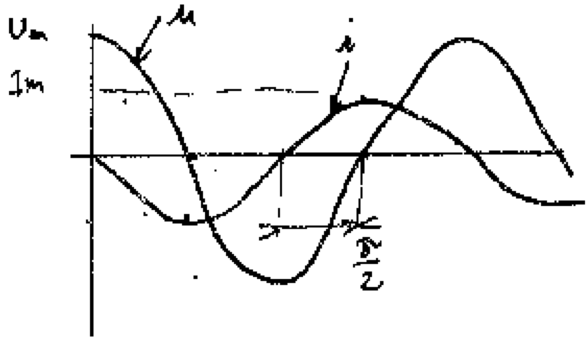


Condensateur soumis à une ddp sinusoïdale

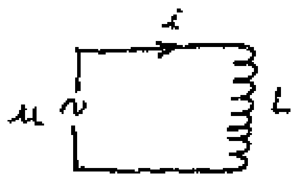


un condensateur de capacité C soumis à une ddp sinusoïdale $u = U_m \cos\omega t$ est parcouru par un courant sinusoïdal $i = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ avec $\boxed{Z_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega}}$

la tension aux bornes du condensateur est en retard d'un quart de période par rapport au courant (déphasage de $-\frac{\pi}{2}$)

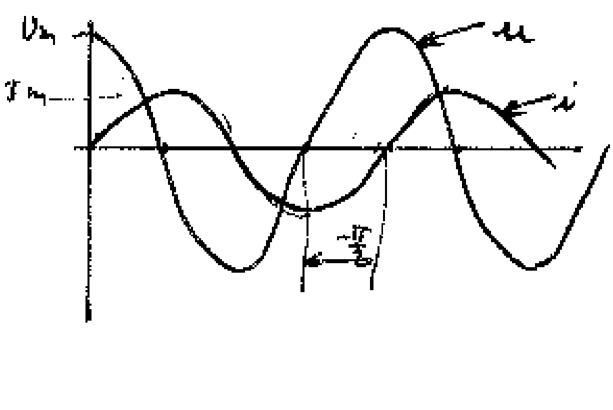


Self soumise à une ddp sinusoïdale



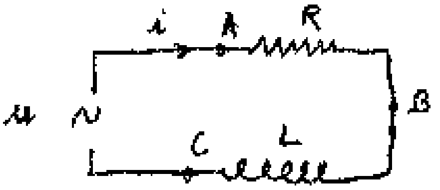
une self (bobine) de coefficiant de self-induction L soumise à une ddp sinusoïdale $u = U_m \cos\omega t$ est parcourue par un courant $i = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ avec $\boxed{Z_L = \frac{U_m}{I_m} = L\omega}$

la tension aux bornes de la self est avance d'un quart de période par rapport au courant ($\varphi = +\frac{\pi}{2}$)



Association résistance et self en série

Etudions le comportement en courant alternatif d'une self et d'une résistance montées en série



En alternatif on peut appliquer les lois du courant continu pour des valeurs instatanées

Dans ce cas puisque R et L sont montées en série elles sont parcourues par le même courant $i = I_m \cos \omega t$

La valeur instantanée de la tension aux bornes de R est :
$u_R = R I_m \cos \omega t$ (application de la loi d'Ohm, et u et i sont en phase)

La valeur instantanée de la tension aux bornes de L est ;
$u_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ (l'impédance de la self est $L\omega$ et la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant)

On sait qu'en courant continu les tensions s'ajoutent algébriquement.
Appliquons cette règle à des valeurs instantanées

$V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) \qquad u = u_r + u_L$

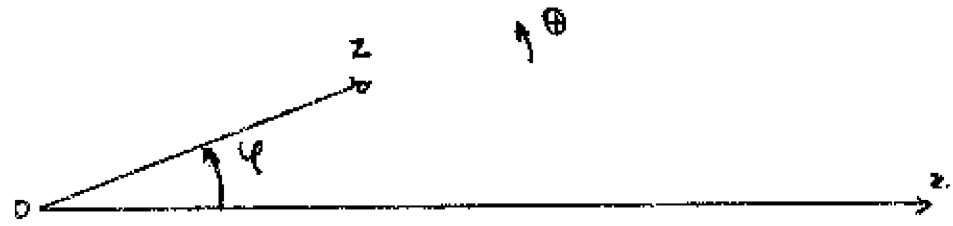
soit $\quad u = R I_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

On se trouve confronté au problème suivant : il faut ajouter deux fonctions sinusoïdales de même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mais d'amplitudes différentes ($R I_m$ et $L\omega I_m$) et de phases différentes (0 et $+\frac{\pi}{2}$)

Pour cela on a recours aux vecteurs de Fresnel

Vecteurs de Fresnel

Soit un point O origine un axe Ox orienté



On représente la fonction sinusoïdale du type $z = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ par le vecteur $\vec{OZ}$ dont le module (longueur OZ) vaut Z_m et l'angle polaire (angle $\widehat{Ox, OZ}$) vaut φ. (On compte les angles positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre)

si OZ est "au dessus" de ox φ est positif
si OZ est "au dessous" de ox φ est négatif

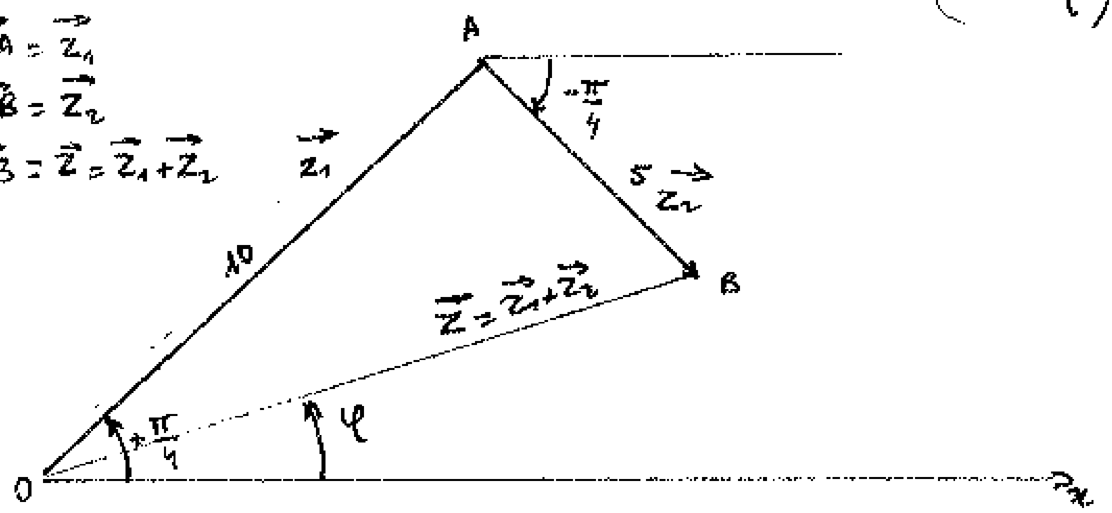
L'intérêt de cette représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale est que pour additionner deux fonctions sinusoïdales de même fréquence, il suffit d'ajouter les vecteurs de fresnel correspondants

Exemple : $z_1 = 10 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$ $\frac{\pi}{4} = 45°$
$z_2 = 5 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$

représentons z_1 par le vecteur $\vec{Z_1}$
" z_2 " $\vec{Z_2}$
$z_1 + z_2$ sera représenté par $\vec{Z} = \vec{Z_1} + \vec{Z_2}$

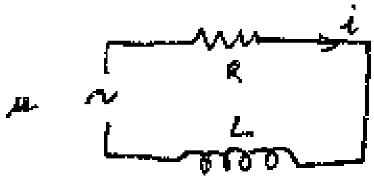
$z_1 + z_2 = z = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\vec{OA} = \vec{Z_1}$
$\vec{AB} = \vec{Z_2}$
$\vec{OB} = \vec{Z} = \vec{Z_1} + \vec{Z_2}$



pour avoir Z_m et φ il suffit de mesurer sur le graphique en tenant compte de l'échelle.

Revenons à l'exemple précédent

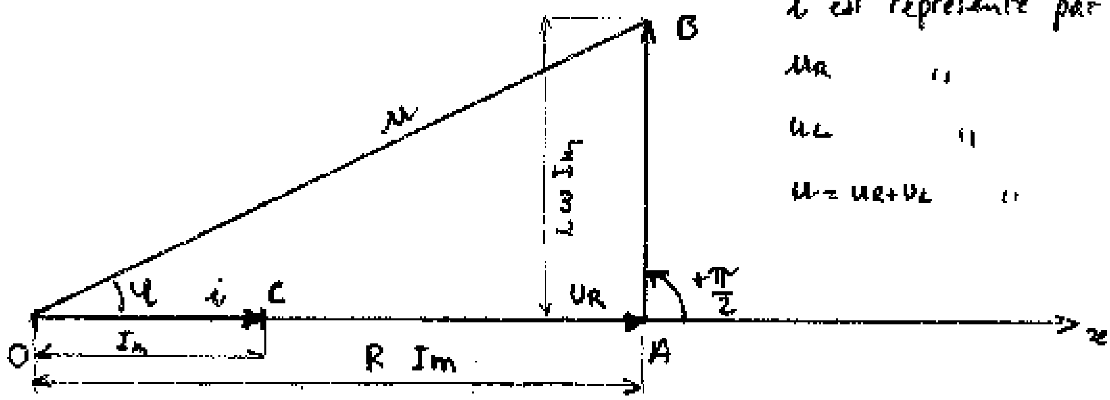


On avait $u_R = R I_m \cos\omega t$

$u_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

et $i = I_m \cos\omega t$

Représentons i, puis u_R (aligné avec i), puis u_L (perpendiculaire à i puisque $\varphi = +\frac{\pi}{2}$)



i est représenté par $\vec{OC}$
u_R " $\vec{OA}$
u_L " $\vec{AB}$
$u = u_R + u_L$ " $\vec{OB}$

la tension $u = u_R + u_L = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par le vecteur $\vec{OB}$. U_m est égal à la longueur de OB (en tenant compte de l'échelle)
φ est égal à l'angle $(\widehat{Ox, OB})$

Si on applique le théorème de pythagore au triangle rectangle OAB on obtient $OB^2 = OA^2 + AB^2$

soit $U_m^2 = R^2 I_m^2 + L^2\omega^2 I_m^2 = I_m^2 (R^2 + L^2\omega^2)$

soit $U_m = I_m \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

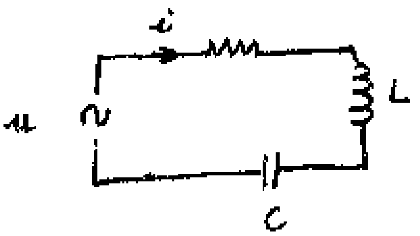
de plus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega I_m}{R I_m} = \frac{L\omega}{R}$ (tg : fonction trigonométrique tangente : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$)

le rapport $\frac{U}{I}$ est l'impédance du circuit et vaut $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

φ est le déphasage entre la tension et le courant

En conclusion un circuit série R, L soumis à une tension sinusoïdale de valeur $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est traversé par un courant sinusoïdal $i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t)$

Circuit R, L, C série



tous les éléments du circuits sont parcourus par le même courant $i = I_m \cos\omega t$

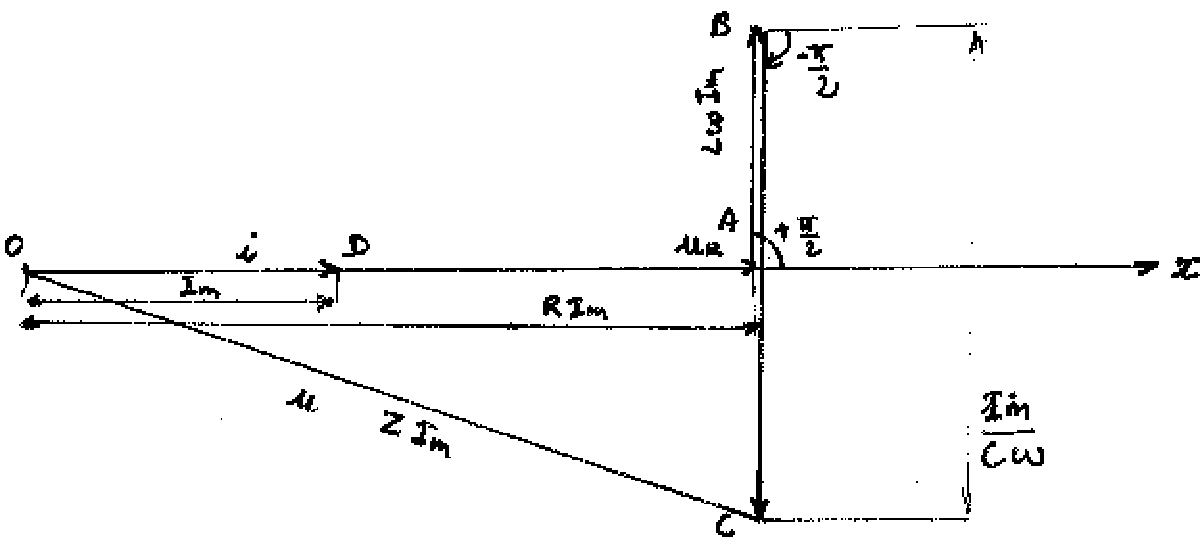
la tension aux bornes de R est $u_R = R I_m \cos\omega t$

" L $u_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

" C $u_C = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

les tension s'ajoutent algébriquement pour des valeurs instantanées : $u = u_R + u_L + u_C$

soit en représentation de Fresnel



i est représenté par $\vec{OD}$

u_R " $\vec{OA}$

u_L " $\vec{AB}$

u_C " $\vec{BC}$

u " $\vec{OC}$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$

En appliquant le théorème de pythagore au triangle rectangle OAC on obtient

$$OC^2 = OA^2 + (BC - AB)^2$$

soit $U_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_m^2$

l'impédance du circuit Z vaut $Z = \frac{U_m}{I_m}$ soit $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

le déphasage φ est tel que $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$

On voit dans le cas du circuit R,L,C série qu'on peut avoir $\varphi = 0$ c'est à dire avoir le courant en phase avec la tension. Cela se produit quand $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

donc quand le condensateur et la self ont la même impédance si L et C sont fixés cela se produit pour une fréquence bien précise :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit finalement $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

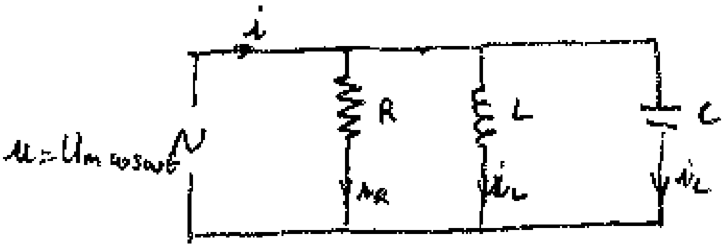
ceci est la formule de Thomson f est appelé fréquence de résonance

A la fréquence de résonance comme $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, l'impédance du circuit est minimale et vaut R.

Tout se passe comme s'il n'y avait plus que la résistance R dans le circuit ($\varphi = 0$ pas de déphasage courant-tension)

Dans le cas où R est nulle le circuit L,C série équivaut à un court-circuit à la fréquence de résonance

Circuit R, L, C parallèles



R, L, C sont montés en parallèle et branchés sur une source alternative sinusoïdale $u = U_m \cos\omega t$

Aux bornes de R, L et C la tension est la même et vaut $u = U_m \cos\omega t$

le courant qui traverse R est $i = \frac{U_m}{R}\cos\omega t$ (pas de déphasage)

L est $i = \frac{U_m}{L\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ (courant en retard de $\frac{\pi}{2}$)

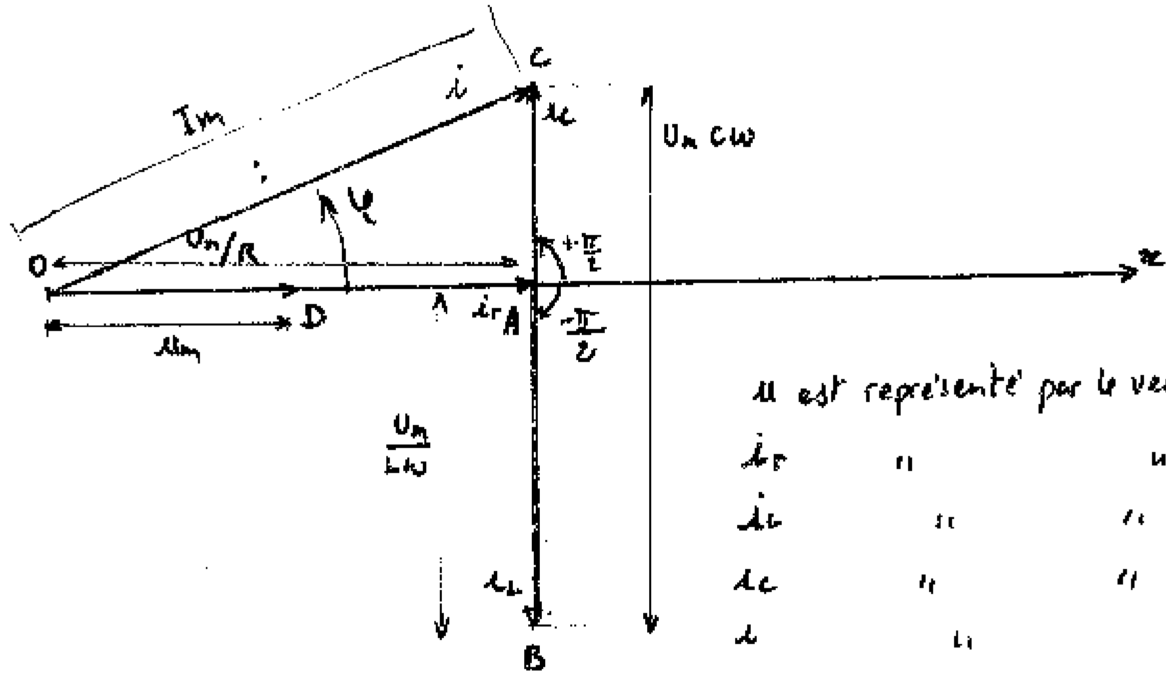
C est $i = U_m C\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ courant en avance de $\frac{\pi}{2}$

le courant issu de la source de courant, de valeur $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ se partage en trois courants i_R, i_L et i_C et on a

$$i = i_R + i_L + i_C$$

i_R, i_L et i_C sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence mais d'amplitudes et de phases différentes.

Additionnons les par la méthode des vecteurs de Fresnel



u est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OD}$

i_R " " $\overrightarrow{OA}$

i_L " " $\overrightarrow{AB}$

i_C " " $\overrightarrow{BC}$

i " $\overrightarrow{OC}$

en appliquant le théorème de pythagore au triangle OAC

$$OC^2 = OA^2 + (AB - BC)^2$$

soit $$I_m^2 = \frac{U_m^2}{R^2} + \left(\frac{U_m}{L\omega} - U_m C\omega\right)^2 = U_m^2 \left(\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2\right)$$

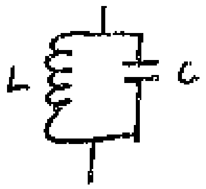
l'impédance du circuit parallèle R, L, C vaut $Z = \frac{U_m}{I}$

soit $$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}$$

A la fréquence de résonance $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (lorsque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$),

le circuit est équivalent à une résistance pure de valeur R. la tension et le courant sont en phase $\left(\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right) \times R = 0 \Rightarrow \varphi = 0\right)$

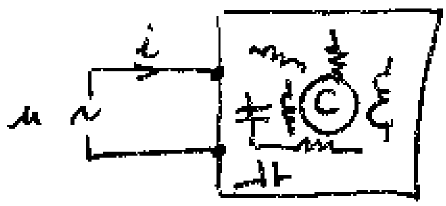
D'après les formules précédentes on voit que dans le cas d'un circuit L, C (R n'existant pas on peut la considérer comme infini) l'impédance du circuit L,C tend vers l'infini à la fréquence de résonance donc Im tend vers zéro.



à la fréquence $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ Z est infini

Puissance en courant alternatif

On a vu que si on branche un circuit C, constitué de résistances, de condensateurs, de selfs sur une source de tension alternative $u = U_m \cos \omega t$, il passe dans ce circuit un courant $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$



l'impédance du circuit C est $Z = \frac{U_m}{I_m}$

φ est le déphasage entre la tension et l'intensité.

En application des lois du courant continu à des valeurs instantanées, la puissance instantanée dissipée dans le circuit C est $p = u \cdot i = U_m \cos \omega t \; I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

La puissance instantanée est donc variable en fonction du temps, mais reprend la même valeur après une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Le calcul montre que la valeur moyenne de la puissance pendant une période vaut $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$

soit $\boxed{P = U_{eff} \; I_{eff} \cos \varphi}$ $\left(U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ et } I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad U_{eff} I_{eff} = \frac{U_m I_m}{2} \right)$

φ est l'angle de déphasage entre la tension et le courant, cos est la fonction cosinus. <u>$\cos \varphi$ est appelé facteur de puissance</u>

Cette puissance $P = V_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi$ est de la puissance active c'est à dire dissipée sous forme de chaleur par exemple.

Dans le cas où le circuit est une résistance pure (radiateur électrique, chauffe eau électrique, fer à repasser...) comme $\left\{\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \cos\varphi = 1\end{array}\right.$ $P = V_{eff}\, I_{eff}$

Dans le cas où le circuit est une self ou un condensateur φ vaut $\pm\frac{\pi}{2}$ et alors $\cos\varphi = 0$ la puissance active est nulle. $P = 0$

Bien qu'il passe un courant dans le condensateur ou la self il n'y a pas de puissance dissipée donc de dégagement de chaleur. On dit alors que la puissance est réactive. Cette puissance réactive a pour expression $P_r = V_{eff}\, I_{eff} \sin\varphi$ (sin : fonction sinus)

Dans le cas d'une résistance pure $\varphi = 0 \Rightarrow P_r = 0$ il n'y a pas de puissance réactive

On parle parfois de puissance apparente, celle-ci valant $P = V_{eff}\, I_{eff}$ et s'exprimant en V.A (Volts. Ampères)

La puissance active (dissipation de chaleur, ou dissipation d'énergie mécanique dans le cas d'un moteur électrique par exemple) s'exprime en Watts (W)

Pour la puissance réactive $P = V_{eff}\, I_{eff} \sin\varphi$ on utilise parfois comme unité les Volts-Ampères réactifs.