Formules mathématiques

Pour exprimer des lois mathématiques ou physiques de manière simple, on fait appel à des formules mathématiques :

ex $S = L \times l$ est la formulation simplifiée de : "la surface d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur."

S, L, l sont appelées variables.

Pour appliquer une formule on remplace chaque variable par sa valeur et on effectue le calcul

Si $L = 10{,}50\,m$ et $l = 2{,}70$

$S = 10{,}50\,m \times 2{,}70\,m = 28{,}35\,m^2$

Très souvent dans les formules on remplace le signe de la multiplication "x" par "." ; on le supprime même

$S = L \times l$ devient $S = L \cdot l$ ou $S = Ll$

On remplace aussi le signe de la division ":" par la barre de fraction "—" ou "/"

Ex : «la vitesse est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance» donne la formule

$V = D : t$ ou $V = \frac{D}{t}$ ou encore $V = D/t$

Egalités

Les formules se présentent souvent sous forme d'égalités, les deux membres de l'égalité ne comportent souvent que des multiplications ou des divisions ex : $P = \frac{U \times U}{R}$ ou $P = R \times I \times I$

On ne change pas une égalité en multipliant ou en divisant les deux membres de l'égalité par un même nombre non nul

Si $a = b \implies na = n.b$, $\frac{a}{n} = \frac{b}{n}$

Application : la loi d'Ohm s'écrit : $U = R.I$

en divisant les deux membres par I on obtient $\frac{U}{I} = R$

Dans la pratique cela revient à passer une variable d'un membre de l'égalité à l'autre et en la mettant au numérateur si elle était au dénominateur et au dénominateur si elle était au numérateur

ex $U = R \times I \Rightarrow \frac{U}{R} = I$: On a passé R du numérateur de droite au dénominateur de gauche.

Dans l'exemple $a = b$ en divisant par $a \times b$ on obtient

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

Puissances :

Pour noter le produit $a \times a$ on écrit a^2 (lire "a puissance deux" ou "a au carré".

ex surface d'un cercle $S = \pi \times R \times R = \pi . R^2$ $(\pi = 3,14)$

Plus généralement a^n désigne le produit de a par lui-même n fois $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$ n est appelé exposant

l'exposant est un entier positif

Par convention on note $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \cdots \times a}_{n \text{ fois}}} = a^{-n}$ (lire "a puissance moins n)

Règles :

$$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times \cdots a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a \times a \times \cdots a}{\underbrace{a \times a \times \cdots a}_{m \text{ fois}}} = a^{n-m}$$

Puissances de 10

Pour noter les multiples et les sous multiples de 10 on utilise les puissances de 10

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$1\,000\,000 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{6 \text{ fois}} = 10^6$

10^n représente le nombre 1 suivi de n zéros

ex : $1 \text{ Km} = 1\,000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$

de même $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000}$ $1 \text{mm} = 1/1000 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$

Remarque $10^0 = 1$

Pour calculer facilement avec des nombres très petits ou très grands on écrit ces nombres avec des puissances de 10 :

ex $123\,000\,000 = 123 \times 1\,000\,000 = 123 \times 10^6$

ou encore $= 1{,}23 \times 100\,000\,000 = 1{,}23 \times 10^8$

$0{,}0283 = 283 \times 0{,}0001 = 283\ 10^{-4}$

$= 2{,}83 \times 0{,}01 = 2{,}83\ 10^{-2}$

application aux formules :

Soit à calculer la réactance Z d'un condensateur de capacité $C = 47\,nF$ à la fréquence $f = 7{,}040\,MHz$ qui est donnée par la formule $Z = \dfrac{1}{2\pi f C}$

$1\,MHz = 1\,000\,000\,Hz = 10^6\,Hz$ (Hz : Hertz)

$1\,nF = 0{,}000\,000\,001\,F = 10^{-9}\,F$ (F : Farad)

$$Z = \frac{1}{2 \times 3{,}14 \times 7{,}04 \times 10^6 \times 47 \times 10^{-9}} = \frac{1}{2 \times 3{,}14 \times 7{,}04 \times 47 \times \underbrace{10^{6-9}}_{=10^{-3}}} = \frac{10^3}{2 \times 3{,}14 \times 7{,}04 \times 47}$$

$$= \frac{1000}{2 \times 3{,}14 \times 7{,}04 \times 47} = 0{,}48\,\Omega \quad (\Omega = \text{Ohm})$$

Unités

Les grandeurs physiques s'expriment en différentes unités

ex on utilise le mètre (symbole m) pour les longueurs

" le kilogramme " kg " les masses

" la seconde " s " le temps

" l'Ampère " A " l'intensité du courant électrique

On utilise aussi les multiples et les sous-multiples de ces unités multiples :

- déca $\times 10$: da
- hecto $\times 100 = 10^2$: h
- kilo $\times 1000 = 10^3$: k
- méga $\times 1\,000\,000 = 10^6$: M
- giga $\times 1\,000\,000\,000 = 10^9$: g

sous multiples :

- déci $= 1/10 = 10^{-1}$: d
- centi $= 1/100 = 10^{-2}$: c
- milli $= 1/1000 = 10^{-3}$: m
- micro $= \frac{1}{1\,000\,000} = 10^{-6}$: μ
- nano $= \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 10^{-9}$: n
- pico $= \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} = 10^{-12}$: p

Système d'unité :

Pour appliquer une formule il faut que toutes les variables soient exprimées dans les unités d'un même système d'unités. Par la suite on utilisera toujours le système d'unités international dit système "SI"

Les unités fondemmentales de ce système sont : le mètre, le kilogramme, la seconde et l'Ampère

ex : la vitesse s'exprimera en m/s (mètres par seconde) et non pas en km/h.

Si dans une formule les variables sont en unités SI, le résultat le sera aussi.

ex : masse d'un cube de pierre de coté $a = 2\,m$ et de masse volumique $\rho = 2{,}7\ t/m^3$

$m = \rho \times a^3$

a est exprimé en m unité SI

exprimons ρ en unité SI $2{,}7\ t/m^3 = 2700\ kg/m^3$

alors $m = 2700 \times 2^3 = 21\,600\ kg$

Exercices

1) Dans les formules suivantes exprimer f en fonction des autres variables : $\lambda = \frac{c}{f}$ $Z = \frac{1}{2.\pi.f.C}$ $Z = 2\pi.f.L$

2) Calculer :

$2^2 \times 2^3$, $\frac{5^4 \times 5^2}{5^6}$, $7^2 \times 7^5 \times 7^{-4}$, $\frac{4^7 \times 4^3}{4^{-5} \times 4^2}$, $\frac{10^{-9} \times 10^7}{10^{-8} \times 10^{12}}$

3) Calculer : $\frac{1{,}2 \times 10^3 \times 7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^{-6}}{47 \times 10^9 \times 53 \times 10^{-3}}$ $\frac{2 \times \pi \times 5{,}4 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^7}{4 \times 5{,}43 \times 10^{-9}}$

4) Exprimer sous forme de puissance de 10 :

1 320 000 , 4 589 000 000 , 654 000 000 000 , 0,13 , 0,0028 , 0,000183

5) Calculer et exprimer le résultat sous forme de puissance de 10

$\frac{0{,}148 \times 12\,800 \quad 10^{-5}}{0{,}0488 \times 1\,000\,000 \times 5 \times 10^{-2}}$ $\frac{484 \times 10^{-7} \times 0{,}0413 \times 10^{-9}}{28\,\pi \times 57 \times 10^{-11} \times 1\,000}$

6) Convertir en mètres les longueurs suivantes en les exprimant si besoin avec des puissance de 10

0,15 µm , 300 000 km , 70 cm , 8 dam

7) Convertir en Farad (symbole F) les valeurs des condensateurs suivantes

470pf , 2,2 nF , 0,33µF , 10 000µF

8) Convertir en Ohm (symbole Ω) les valeurs des résistances suivantes

1,5 MΩ , 330 kΩ , 27 kΩ , 680 kΩ , 22 MΩ

9) Convertir en Hertz (symbole Hz) les fréquences suivantes

3,8 MHz , 14 MHz , 144 MHz 1,296 GHz 455 kHz

10) Calculer la longueur d'onde en m des fréquences suivantes :

7 MHz , 27 MHz , 28 MHz , 432 MHz sachant que la longueur d'onde λ en mètres est donnée par la formule $\lambda = \frac{c}{f}$ avec c vitesse de la lumière égale à 300 000 km/s et f fréquence en Hz.

1) $f = \frac{c}{\lambda}$ $\quad f = \frac{1}{2\pi Z C}$ $\quad f = \frac{Z}{2\pi L}$

2) $2^5 = 32$, $1{,}7^3 = 343$, 4^{13}, 10^{-6}

3) $1{,}686 \; 10^{-15}$ $\quad 9{,}37 \cdot 10^{8}$

4 $1{,}32 \; 10^{6}$ $\quad 4{,}589 \; 10^{9}$ $\quad 6{,}54 \; 10^{11}$ $\quad 1{,}3 \; 10^{1}$ $\quad 2{,}8 \; 10^{3}$ $\quad 1{,}83 \; 10^{4}$

5) $7{,}76 \; 10^{-10}$ $\quad 3{,}99 \; 10^{-11}$