

Les fractions

Les fractions sont des nombres de la forme $\frac{n}{d}$, n et d étant des nombres entiers ($0, 1, 2, 3, 4, \dots$)

Exemples de fractions : $\frac{1}{2}$: un demi $\frac{5}{8}$: cinq huitièmes $\frac{7}{12}$: sept douzièmes

La fraction $\frac{n}{d}$ représente la division de n par d $\frac{n}{d} = n : d$
 n s'appelle le numérateur, d le dénominateur

ex $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$ $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625$ $\frac{7}{12} = 7 : 12 = 0,58333\dots$

Tout nombre entier n est égale à la fraction $\frac{n}{1}$ ex : $\frac{3}{1} = 3$

Égalité de deux fractions

Deux fractions $\frac{n_1}{d_1}$ et $\frac{n_2}{d_2}$ sont égales si le résultat de la division du numérateur par le dénominateur est le même : $n_1 : d_1 = n_2 : d_2$

Ex : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ puisque $2 : 3 = 4 : 6 = 0,666\dots$

Si on multiplie ou on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale :

ex : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ $\frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3}$

Simplification d'une fraction

En divisant numérateur et dénominateur d'une fraction par un même nombre on obtient, si la division est possible (tombe juste), une fraction égale mais plus simple :

ex : $\frac{45}{60} = \frac{45 : 5}{60 : 5} = \frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$

Multiplication d'une fraction par un nombre

Pour multiplier une fraction par un nombre on multiplie le numérateur par ce nombre sans changer le dénominateur

ex : $\frac{5}{2} \times 3 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$

Multiplication de deux fractions entre elles

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$\text{ex: } \frac{4}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{5 \times 7} = \frac{20}{21}$$

Inverse d'une fraction

Deux fractions sont inverses l'une de l'autre si en les multipliant entre elles on obtient 1

$$\text{ex } \frac{2}{3} \text{ est l'inverse de } \frac{3}{2} \text{ puisque } \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$$

Pour obtenir l'inverse d'une fraction il suffit d'intervertir numérateur et dénominateur.

$$\text{ex l'inverse de } \frac{3}{4} \text{ est } \frac{4}{3}$$

Division de deux fractions

Pour diviser une fraction par une autre fraction, on la multiplie par l'inverse de cette dernière

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{2 \times 8}{3 \times 5} = \frac{16}{15}$$

Division d'une fraction par un nombre

Un nombre n est toujours égale à la fraction $\frac{n}{1}$
l'inverse de $n = \frac{n}{1}$ est donc $\frac{1}{n}$

Pour diviser une fraction par un nombre il faut la multiplier par l'inverse de ce nombre

$$\text{ex } \frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7 \times 1}{8 \times 3} = \frac{7}{24}$$

Cela revient en fait à multiplier le dénominateur par ce nombre

Addition - Soustraction de deux fractions

On ne peut additionner ou soustraire que des fractions qui ont le même dénominateur

Pour additionner ou soustraire deux fractions ayant le même dénominateur on additionne ou on soustrait les numérateurs en conservant le dénominateur

$$\text{ex } \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{4+7}{3} = \frac{11}{3} \qquad \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8-2}{5} = \frac{6}{5}$$

Réduction de deux fractions au même dénominateur

Pour additionner ou soustraire deux fractions il faut qu'elles aient le même dénominateur

En multipliant numérateur et dénominateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre on ne change pas la valeur des fractions mais on obtient deux fractions ayant le même dénominateur :

$$\text{ex : } \frac{2}{3} \text{ et } \frac{7}{5} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} = \frac{21}{15}$$

Dans certains cas on peut trouver un dénominateur commun plus petit que le produit des dénominateurs :

$$\text{ex } \frac{13}{20} \text{ et } \frac{7}{30} \quad \text{on peut prendre comme dénominateur commun } 30 \times 20 = 600 \quad \text{les fractions deviennent alors } \frac{13 \times 30}{20 \times 30} = \frac{390}{600}$$

$$\text{et } \frac{7 \times 20}{30 \times 20} = \frac{140}{600}$$

mais on aurait aussi pu prendre comme dénominateur commun 60 ce qui aurait donné :

$$\frac{13}{20} = \frac{13 \times 3}{20 \times 3} = \frac{39}{60} \qquad \text{et } \frac{7}{30} = \frac{7 \times 2}{30 \times 2} = \frac{14}{60}$$

Application des fractions au calcul numérique

En électricité et en électronique, on est souvent amené à effectuer des calculs du type:

$$12 : 0,3 \quad \text{ou} \quad 4,5 \times (4,5 : 0,15).$$

Pour plus de commodité on note ces opérations sous forme de fraction où les numérateurs et les dénominateurs ne sont plus des nombres entiers mais des nombres décimaux ou des produits de nombres décimaux

$$12 : 0,3 = \frac{12}{0,3} \quad 4,5 \times (4,5 : 0,15) = 4,5 \times \frac{4,5}{0,15} = \frac{4,5 \times 4,5}{0,15}$$

Pour effectuer les opérations on calcule le numérateur, puis le dénominateur; ensuite on effectue la division

$$\frac{4,5 \times 4,5}{0,15} = \frac{20,25}{0,15} = 20,25 : 0,15 = 135$$

Mais on peut aussi appliquer les règles de simplification des fractions (multiplication ou division du numérateur et du dénominateur par un même nombre sans changer le résultat

$$\text{ex } \frac{4,5 \times 4,5}{0,15} = \frac{45 \times 45}{15} \quad (\text{multiplication par 100 du numérateur et du dénominateur})$$

$$\frac{45 \times 45}{15} = \frac{45 \times 3}{1} = 135 \quad (\text{Division par 15 du numérateur et du dénominateur})$$

Dans la pratique on utilise les règles de simplification surtout pour "supprimer" des zéros et des virgules

$$\text{ex } \frac{340\,000 \times 0,007}{1300 \times 0,012 \times 580} = \frac{\cancel{340\,000} \times 0,007}{\cancel{1300} \times 0,012 \times \cancel{580}} = \frac{340 \times 0,007}{13 \times 0,012 \times 58} = \frac{340 \times 7}{13 \times 12 \times 58}$$

on "supprime" autant de zéros en "haut" qu'en "bas"

on déplace d'autant la virgule en "haut" qu'en "bas"

Exercices

1) Simplifier les fractions suivantes:

$\frac{6}{4}$

$\frac{64}{12}$

$\frac{42}{7}$

2) Effectuer les opérations suivantes et simplifier quand c'est possible

$2 \times \frac{5}{4}$

$9 \times \frac{2}{3}$

$40 \times \frac{3}{12}$

$\frac{400 \times 100}{39000}$

3) Inverser les nombres et fractions suivants et simplifier si possible.

7

$\frac{9}{4}$

$\frac{20}{300}$

4) Effectuer les opérations suivantes et simplifier si possible

$\frac{4}{3} : 2$

$\frac{6}{7} : 3$

$\frac{48}{13} : 12$

5) Effectuer les opérations suivantes et simplifier si possible

$\frac{9}{3} + \frac{8}{3}$

$\frac{13}{5} + \frac{1}{5}$

$\frac{43}{12} + \frac{13}{12}$

6) Réduire au même dénominateur et effectuer les opérations

$\frac{5}{4} + \frac{7}{3}$

$\frac{4}{15} + \frac{1}{5}$

$\frac{14}{3} - \frac{7}{12}$

7) Simplifier puis effectuer le calcul en donnant le résultat sous forme de nombre décimal

$580 \times 0,012 \times 3,142 \times 0,967$

$18400 \times 54,5 \times 0,0483$

$7,83 \times 7010 \times 1000 \times 2 \times 3,142$

$0,006 \times 10000 \times 4200 \times 100$